УДК 519.21, 517.98

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ НА ПРОСТРАНСТВЕ КОНФИГУРАЦИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ СО СПЕЦИФИКАЦИЯМИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Б.С. Нахапетян[1], Л.А. Хачатрян[2]

1 *nahapet@instmath.sci.am*; Институт математики Национальной академии наук Армении
2 *linda@instmath.sci.am*; Институт математики Национальной академии наук Армении, Российско–Армянский (Славянский) университет

В докладе показывается, что задача описания случайных полей в терминах подсистемы спецификации, состоящей только из одноточечных распределений вероятностей (проблема Добрушина), сводится к вопросу продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций. Такое продолжение возможно при выполнении определенных условий симметрии функционала.

Ключевые слова: спецификация, случайные поля.

Основополагающую роль в вопросах описания случайных полей имеет введенное Р. Добрушиным ([1,2]) понятие спецификации — согласованной системы конечномерных распределений с бесконечными граничными условиями. В этих работах были сформулированы условия, при которых случайное поле с заданной спецификацией существует, а также условия, при которых оно единственно. При этом существует определенная дисгармония в полученных Добрушиным условиях существования и единственности случайного поля, совместимого с заданной спецификацией (говорят, что случайное поле совместимо со спецификацией Q, если его условное распределение почти всюду совпадает с Q). Дело в том, что условие единственности случайного поля накладывает ограничения только на подсистему одноточечных распределений спецификации, в то время как условие существования накладывает ограничения на все ее элементы.

В связи с этим Добрушиным была высказана гипотеза о том, что описание случайных полей может быть дано в терминах подсистемы спецификации, состоящей только из одноточечных распределений вероятностей (проблема Добрушина). Данная задача была решена в работах [3, 4] С. Дашяна и Б. Нахапетяна, где были найдены необходимые и достаточные условия (условия согласованности), при которых система одноточечных распределений является подсистемой некоторой спецификации.

В настоящей работе показывается, что проблема Добрушина сводится к вопросу продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций ([5, 6]). Указанный подход может быть применен при исследовании свойств случайных полей (слабая зависимость компонент, единственность), а также к некоторым задачам математической статистической физики, в частности, к вопросу описания гиббсовских случайных полей.

Введем необходимые обозначения. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — некоторое непустое конечное множество, $\mathbb{Z}^d$ — d-мерная целочисленная решетка (совокупность d-мерных векторов с целочисленными компонентами), $d \ge 1$, и $W = \left\{V \subset \mathbb{Z}^d, |V| < \infty\right\}$ — множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$. При обозначении одноточечных множеств $\{t\}$, $t \in \mathbb{Z}^d$, в некоторых случаях фигурные скобки будут опускаться. Далее, обозначим через $X^S = \{(x_t, t \in S)\}$, $x_t \in X$, множество конфигураций на S, $S \subset \mathbb{Z}^d$, т.е. совокупность всех функций, определенных на S со значениями в X. Для любых $S, T \subset \mathbb{Z}^d$, таких что $S \cap T =$ ffl, и любых $x \in X^S$ и $y \in X^T$ через xy будем обозначать конкатенацию x и y, т.е. такую конфигурацию на $S \cup T$, которая совпадает с x на S и с y на T. Для $S \subset T$, $x \in X^T$, запись x_S означает сужение конфигурации x на S.

Совокупность функций $\mathrm{Q} = \left\{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}, V \in W\right\}$ на пространстве конфигураций назовем спецификацией, если:
1. для каждого $V \in W$ и конфигурации $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$ совокупность $\left\{q_V^{\bar{x}}(x), x \in X^V\right\}$ является распределением вероятностей на X^V (с бесконечными граничными условиями $\bar{x}$), т.е. $q_V^{\bar{x}}(x) \ge 0$ для всех $x \in X^V$ и $\sum\limits_{x \in X^V} q_V^{\bar{x}}(x) = 1$; 2. элементы Q удовлетворяют следующим условиям согласованности: для всех $I \subset V \in W$, $x \in X^I$, $y \in X^{V \setminus I}$ и $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$

$$q_V^{\bar{x}}(xy) = q_I^{\bar{x}y}(x) \sum_{z \in X^I} q_V^{\bar{x}}(zy).$$

По заданной спецификации Q однозначным образом определяется ее одноточечная подсистема $\mathrm{Q}^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\} \subset \mathrm{Q}$. Решение обратной задачи — восстановление спецификации Q по ее одноточечной подсистеме $\mathrm{Q}^{(1)}$ — было получено в работе [4], в которой указаны необходимые и достаточные условия (условия согласованности), при которых система одноточечных распределений $\mathrm{Q}^{(1)}$ является подсистемой некоторой спецификации Q, а также приводится формула восстановления элементов спецификации Q по элементам $\mathrm{Q}^{(1)}$.

Теорема 1. *Пусть* $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus t}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ *— совокупность одноточечных условных распределений вероятностей с бесконечными граничными условиями. Для того чтобы совокупность* $Q^{(1)}$ *была подсистемой некоторой спецификации, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия согласованности: для любых* $t, s \in \mathbb{Z}^d$, $x, u \in X^{\{t\}}$, $y, v \in X^{\{s\}}$ *и* $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t,s\}}$

$$q_t^{\bar{x}y}(x) q_s^{\bar{x}x}(v) q_t^{\bar{x}v}(u) q_s^{\bar{x}u}(y) = q_s^{\bar{x}x}(y) q_t^{\bar{x}y}(u) q_s^{\bar{x}u}(v) q_t^{\bar{x}v}(x). \tag{1}$$

Соответствующая спецификация Q *восстанавливается по* $\mathrm{Q}^{(1)}$ *однозначно, причем для всех* $V \in W$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$ *и* $x \in X^V$

$$q_V^{\bar{x}}(x) = \frac{1}{Z} \cdot \frac{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,\dots,t_n\}}}(x_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}x_{t_1}u_{\{t_3,\dots,t_n\}}}(x_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_{t_n}^{\bar{x}x_{\{t_1,\dots,t_{n-1}\}}}(x_{t_n})}{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,\dots,t_n\}}}(u_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}x_{t_1}u_{\{t_3,\dots,t_n\}}}(u_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_{t_n}^{\bar{x}x_{\{t_1,\dots,t_{n-1}\}}}(u_{t_n})}, \tag{2}$$

где

$$Z = \sum_{z \in X^V} \frac{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,\dots,t_n\}}}(z_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}z_{t_1}u_{\{t_3,\dots,t_n\}}}(z_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_{t_n}^{\bar{x}z_{\{t_1,\dots,t_{n-1}\}}}(z_{t_n})}{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,\dots,t_n\}}}(u_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}z_{t_1}u_{\{t_3,\dots,t_n\}}}(u_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_{t_n}^{\bar{x}z_{\{t_1,\dots,t_{n-1}\}}}(u_{t_n})},$$

$V = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ *— некоторая нумерация точек множества* V, $n = |V|$, *а* $u \in X^V$ *— произвольная конфигурация.*

Далее будет показано, что задача восстановления спецификации Q по ее одноточечной подсистеме $Q^{(1)}$ сводится к вопросу продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций.

Пусть $V \in W$. Рассмотрим следующее функциональное уравнение

$$a(x) = A(x,y)a(y), \tag{3}$$

где $a(x)$ — искомая функция, а $A(x,u)$ — известная функция, определенная на упорядоченных парах конфигураций, $x,u \in X^V$. Для того чтобы уравнение (3) имело бы решение, необходимо, чтобы функция $A(x,u)$ удовлетворяла следующему очевидному соотношению

$$A(x,u) = A(x,z)A(z,u). \tag{4}$$

Отсюда следует, что $A(x,x) = 1$, и, кроме того, для любых двух последовательностей конфигураций $z_1, z_2, ..., z_n$ и $z_1', z_2', ..., z_m'$ выполняется равенство

$$A(x,z_1)A(z_1,z_2)\cdot\ldots\cdot A(z_n,u) = A(x,z_1')A(z_1',z_2')\cdot\ldots\cdot A(z_m',u).$$

Утверждение. *Пусть выполнено условие* (4). *Тогда при любом $z_0 \in X^V$ и постоянной $C(z_0)$ функция*

$$a(x) = A(x,z_0)C(z_0), \qquad x \in X^V,$$

является решением уравнения (3). *Обратно, если функция $a(x)$ является решением уравнения* (3)*, тогда $a(x)$ с необходимостью имеет следующий вид*

$$a(x) = A(x,z_0)a(z_0),$$

где z_0 — любая конфигурация из X^V.

Введем оператор $K_t^{u_t} : X^V \to X^V$, который при действии на конфигурацию $x \in X^V$ присваивает ее компоненте в точке t значение u_t, $u_t \in X^{\{t\}}$, $t \in V$. Пусть $M \subset X^V \times X^V$ — подмножество пар конфигураций на X^V, отличающихся только в одной точке. Пусть заданная на M функция $A^*(x,u)$ удовлетворяет соотношению (4). Приведем условия, при которых функция $A^*(x,u)$ может быть продолжена на все пространство $X^V \times X^V$.

Теорема 2. *Пусть функция $A^*(x,u)$ удовлетворяет следующим условиям согласованности: для всех $x \in X^V$ и любых $t,s \in V$, $u_t \in X^{\{t\}}$, $v_s \in X^{\{s\}}$*

$$A^*(x, K_t^{u_t}x)A^*(K_t^{u_t}x, K_s^{v_s}K_t^{u_t}x) = A^*(x, K_s^{v_s}x)A^*(K_s^{v_s}x, K_t^{u_t}K_s^{v_s}x).$$

Тогда функция $A^*(x,u)$ имеет продолжение $A(x,u)$ на все пространство $X^V \times X^V$, такое, что для $A(x,u)$ выполняется условие (4).

Теорема 1 является прямым следствием Теоремы 2. Действительно, пусть $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ — совокупность одноточечных распределений вероятностей с бесконечными граничными условиями, удовлетворяющая условиям согласованности (1). Пусть $V \in W$, $t,s \in V$, $x,u \in X^{\{t\}}$, $y,v \in X^{\{s\}}$, $z \in X^{V\setminus\{t,s\}}$ и $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus V}$. Положим

$$A^*(xyz, uyz) = \frac{q_t^{\bar{x}zy}(x)}{q_t^{\bar{x}zy}(u)}.$$

Поскольку в силу (1)

$$
\begin{aligned}
A^*(xyz, uyz)A^*(uyz, uvz) &= \frac{q_t^{\bar{x}zy}(x)}{q_t^{\bar{x}zy}(u)} \cdot \frac{q_s^{\bar{x}zu}(y)}{q_s^{\bar{x}zu}(v)} = \\
&= \frac{q_s^{\bar{x}zx}(y)}{q_s^{\bar{x}zx}(v)} \cdot \frac{q_t^{\bar{x}zv}(x)}{q_t^{\bar{x}zv}(u)} = A^*(xyz, xvz)A^*(xvz, uvz),
\end{aligned}
$$

то функционал A^* удовлетворяет условию Теоремы 2. Далее, пусть $V \in W$ и $V = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ — некоторая нумерация его точек, $n = |V|$. Продолжение A^* на $X^V \times X^V$ может быть записано в следующем виде

$$
A(x, u) = A^*(x_{\{t_1,...,t_n\}}, x_{\{t_1,...,t_{n-1}\}} u_{t_n}) \cdot
$$

$$
\cdot A^*(x_{\{t_1,...,t_{n-1}\}} u_{t_n}, x_{\{t_1,...,t_{n-2}\}} u_{\{t_{n-1},t_n\}}) \cdot ... \cdot A^*(x_{t_1} u_{\{t_2,...,t_n\}}, u_{\{t_1,...,t_n\}}) =
$$

$$
= \frac{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,...,t_n\}}}(x_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}x_{t_1}u_{\{t_3,...,t_n\}}}(x_{t_2}) \cdot ... \cdot q_{t_n}^{\bar{x}x_{\{t_1,...,t_{n-1}\}}}(x_{t_n})}{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,...,t_n\}}}(u_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}x_{t_1}u_{\{t_3,...,t_n\}}}(u_{t_2}) \cdot ... \cdot q_{t_n}^{\bar{x}x_{\{t_1,...,t_{n-1}\}}}(u_{t_n})},
$$

где $x, u \in X^V$. Кроме того, решение уравнения

$$
a(x) = A(x, u)a(u), \qquad x, u \in X^V,
$$

удовлетворяющее требованию $\sum\limits_{x \in X^V} a(x) = 1$, единственно и имеет вид

$$
a(x) = \frac{A(x, u)}{\sum\limits_{z \in X^V} A(z, u)},
$$

который совпадает с формулой восстановления спецификации (2).

Исследование выполнено, в том числе, за счет средств, выделенных в рамках субсидии МОН РФ на финансирование научно–исследовательской деятельности Российско–Армянского (Славянского) университета.

Литература

1. Добрушин Р. Л. *Описание случайных полей при помощи условных вероятностей и условия его регулярности* // Теор. вер. и ее примен. – 1968. – Т. 113. – № 2. – С. 201–229.

2. Dobrushin R. L. *Prescribing a system of random variables by conditional distributions* // Theory Probab. Appl. – 1970. – T. 15. – P. 458–486.

3. Dachian S., Nahapetian B. S. *Description of random fields by means of one-point conditional distributions and some applications* // Markov Processes and Related Fields. – 2001. – T. 7. – P. 193–214.

4. Dachian S., Nahapetian B. S. *Description of specifications by means of probability distributions in small volumes under condition of very week positivity* // Journal of Statistical Physics – 2004. – T. 111. – № 1–2. – P. 281–300.

5. Horomyan G. T., Nahapetian B. S. *An algebraic approach to the problem of specification description by means of one-point subsystems* // Journal of Contemporary Mathematical Analysis – 2013. – T. 48. – № 1. – P. 46–49.

6. Нахапетян Б. С., Хачатрян Л. А. *Вероятностные методы в дискретных задачах.* – Ереван: Гитутюн, 2016. – 395 с.

ON SOME FUNCTIONALS ON THE SPACE OF CONFIGURATIONS ASSOCIATED WITH THE SPECIFICATIONS OF RANDOM FIELDS

B.S. Nahapetyan, L.A. Khachatryan

We show that the problem of description of random fields in terms of a subsystem of a specification, consisting only of one-point probability distributions (the Dobrushin problem), reduces to the problem of extension of functionals defined on pairs of configurations that differ only in one point to the whole space of pairs of configurations. Such continuation is possible under certain symmetry conditions of the functional.

Keywords: specification, random field.

УДК 514.822

СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКОГО МОДУЛЯ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

А. Новик[1], А.Н. Малютина[2]

1 *novik.anastasiia@mail.ru*; Томский государственный университет, Механико-математический факультет

2 *nmd@math.tsu.ru*; Томский государственный университет, Механико-математический факультет

Работа посвящена изучению свойств и вычислению сферического модуля семейства кривых, а также искажению его при отображениях с s-усредненной характеристикой [1].

Ключевые слова: пространственный модуль, пространственное отображение, модуль семейства кривых.

Нахождение экстремальных метрик и модулей семейств кривых даже на плоскости нередко связано с трудностями т.к приводящие к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому для отыскания экстремальной метрики не существует универсального метода. До сих пор известно мало пространственных задач, для которых модули найдены. Существенный вклад в развитию теории модулей внесли В.А. Зорич, И.П. Митюк, В.М. Миклюков, Г.Д. Суворов, А.В. Сычев, Б. Фюгледе, Дж. Дженкинс, Ф. Геринг, Ю.Г. Решетняк, O. Martio, S. Rickman, Ju. Väisälä и др.

Определение 1. *Пусть* Γ *– некоторое семейство кривых в* $\bar{R}^n$*. Борелевскую функцию p:* $R^n \to [0;\infty]$ *назовем допустимой метрикой семейства* Γ*, если* $\int_\gamma p\,dl_x \geq 1$ *для каждой кривой* $\gamma \in \Gamma$*, где* $dl_x = \frac{dl}{1+|x|^2}$ *. В дальнейшем запись* $p \wedge \Gamma$ *будет означать, что p есть допустимая метрика семейства* Γ.

Определение 2. *Сферический модуль семейства Г определим по формуле* $M_\alpha(\Gamma) = \inf\int_{R^n} p^\alpha d\sigma_x$*, где* $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$ *и* inf *берется над классом всевозможных метрик* p.

Заметим, что n-мерный интеграл в определении модуля может быть сужен до наименьшего борелевского множества E, содержащего семейство Г, так как inf в